Exercices et problèmes

R_A désigne la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre A et T désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

1. On pose $f = R_A \circ T$.

a. Déterminer $f(B)$. En déduire que f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre I.

b. Montrer que le triangle ICD′ est rectangle isocèle.

2. Soit J le milieu de $[CC']$ et on désigne par R_J la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre J

a. Montrer que $C = R_J(A)$.

b. Que vaut $\left(\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{CB}\right)$?

c. Montrer que le triangle BJD′ est rectangle isocèle.

3. Soit $g = R_J \circ f$.

a. Déterminer $g(B)$.

b. Soit K = R_J( ). Montrer que K est le symétrique de I par rapport au milieu A′ de $[BC]$.

11 On considère des triangles équilatéraux directs OAA′, OBB′ et OCC′.

On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$.

On note E, F et G les symétriques respectifs du point O par rapport à I, J et K

1. Soit r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre B′ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Identifier $f_1 = r_1 \circ r_2$.

2. a. Evaluer $\left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{OA}\right)$.

b. En déduire que le triangle EB′A est équilatéral.

3. Soit t_1 la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ et t_2 la translation de vecteur $\overrightarrow{B'O}$.

a. Préciser la nature de $f_2 = t_1 \circ r_1 \circ t_2$.

b. Déterminer $f_2(B')$ puis identifier f_2.

c. Déterminer $f_2(F)$.

Quelle est alors la nature du triangle EFG ?

d. Quelle est la nature du triangle IJK ? Justifier.

12 On considère un triangle direct OAB, rectangle et isocèle en O.

On note r_A et r_B les rotations de centres respectifs A et B et de même angle $\frac{\pi}{2}$ et S_O la symétrie de centre O.

On place un point C, non situé sur la droite (AB) et on construit les carrés directs BEDC et ACFG.

1. a. Déterminer $S_{(AO)} \circ S_{(AB)}$.

b. Montrer que $S_O = r_A \circ r_B$.

2. a. Déterminer l'image de E par $r_A \circ r_B$.

b. En déduire que O est le milieu du segment $[EG]$.

c. On note r_F et r_D les rotations de centres respectifs F et D et de même angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer $r_F \circ S_O \circ r_D(C)$ puis identifier l'isométrie $r_F \circ S_O \circ r_D$.

d. Soit H le symétrique de D par rapport à O

Démontrer que $r_F(H) = D$, en déduire que le triangle FOD est rectangle et isocèle.

13 On considère un triangle ABC tel que AB = AC et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Soit I, J et K les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. On appelle R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

On pose $f = R \circ T$ et $g = T \circ R$.

1. a. Déterminer l'image de K par f et l'image de J par g.

b. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f et de g.

2. a. Déterminer la nature de $g \circ f^{-1}$.

b. Chercher l'image de A par $g \circ f^{-1}$ et caractériser alors $g \circ f^{-1}$.

c. Soit M un point du plan, n'appartenant pas à la droite (IJ), M_1 est l'image de M par f et M_2 est l'image de M par g.

Montrer que le quadrilatère ACM_2M_1 est un parallélogramme ?